# Über vollständige eingeschriebene Vielseite.

Von dem c. M. Prof. Dr. **Emil Weyr.**

Eine Involution $n$-ten Grades ist durch zwei ihrer Gruppen vollkommen und unzweideutig bestimmt. Oft kann sich jedoch auch die Frage einstellen: „durch wie viel Paare entsprechender Elemente ist eine Involution $n$-ten Grades gegeben?"

Diess soll im Folgenden kurz erörtert werden.

Denken wir uns die Involution als Tangenteninvolution auf einem Kegelschnitte; ihr Erzeugniss, die Involutionscurve (Ort der Schnittpunkte einander entsprechender d. h. derselben Gruppe angehöriger Tangenten) ist eine Curve $(n-1)$-ter Ordnung, welche also durch $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkte bestimmt ist, nur muss dafür Sorge getragen werden, dass sie wirklich eine Involutionscurve ist. Dazu ist nun nothwendig und hinreichend, dass diese Curve einem vollständigen, dem die Involution tragenden Kegelschnitte umschriebenen $n$-Seite umschrieben ist, d. h. durch alle seine $\frac{n(n-1)}{2}$ Ecken hindurchgeht.

Denken wir uns also aus einem beliebigen Punkte der Curve $(n-1)$-ter Ordnung, welche als Involutionscurve auftreten soll an den Trägerkegelschnitt die beiden Tangenten gelegt, so wird eine von ihnen die Curve noch in $(n-2)$ Punkten treffen, von denen an den Kegelschnitt noch $(n-2)$ Tangenten gehen, welche die andere Tagente in $(n-2)$ Punkten und sich gegenseitig in $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ Punkten schneiden. Wenn nun alle diese $(n-2)+\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ d. i. also $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Punkte der Curve angehören, so wird sie eine Involutionscurve sein.

„Soll also eine Curve $(n-1)$-ter Ordnung Involutionscurve bezüglich eines gegebenen Kegelschnittes sein, so zählt diess für $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ die Curve beschränkende Bedingungen."

Die Curve, und damit auch die Involution wird nun gegeben sein, wenn wir noch so viele Punkte der Curve kennen, damit die zuletzt gefundene Zahl auf $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ d. h. auf die Zahl der eine Curve $(n-1)$-ter Ordnung bestimmenden Bedingungen erhöht wird. Diese Zahl ist also

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}=2(n-1).$$

Da nun jeder Punkt ein Tangentenpaar der Involution liefert und umgekehrt, so ist hiermit bewiesen:

„Eine Involution $n$-ten Grades ist bestimmt durch $2(n-1)$ Elementenpaare."

Diese Bestimmung hört auf eindeutig zu sein, wenn $n$ den zweiten Grad übersteigt, da es schon zwei Involutionen dritten Grades gibt, welche als durch vier Elementenpaare bestimmt erscheinen.

Den letzten Satz kann man offenbar auch so aussprechen:

„Eine Curve $(n-1)$-ter Ordnung, welche Involutionscurve für einen gegebenen Kegelschnitt als Träger sein soll, ist (nicht eindeutig) bestimmt durch $2(n-1)$ ihrer Punkte."

Da nun ein Kegelschnitt wiederum fünf einfache Bedingungen darstellt, so kann man sobald, dieser Kegelschnitt unbestimmt gelassen wird, zu der letzten Zahl noch die Zahl fünf hinzufügen, und erhält den Satz:

„Eine Involutionscurve $(n-1)$-ter Ordnung ist (nicht eindeutig) durch $2(n-1)+5$ Bedingungen bestimmt."

Hiebei ist zu bemerken, dass zugleich der Träger-Kegelschnitt als mitgegeben erscheint.

Was nun die Curven selbst betrifft, so erhält der letzte Satz erst für $n-1=4$ eine Bedeutung, da jede Curve erster $(n=2)$, zweiter $(n=3)$ und dritter Ordnung $(n=4)$ als Involutionscurve unendlich vieler Involutionen zweiter, dritter, resp. vierter Ordnung betrachtet werden kann. Wird jedoch $n=5$ also

$n - 1 = 4$ so ist $2(n-1) + 5 = 13$, wogegen eine Curve vierter Ordnung erst durch 14 Bedingungen gegeben ist.

Hieraus folgt zunächst:

„Unter den Curven vierter Ordnung, welche dreizehn gegebenen Bedingungen genügen (z. B. durch 13 Punkte gehen), gibt es nur eine bestimmte Anzahl, welche Involutionscurven sind.“

Hieraus folgt weiter:

„Eine Curve vierter Ordnung ist im allgemeinen keine Involutionscurve.“

Ist eine Curve vierter Ordnung Involutionscurve, so tritt sie (der Natur der Involution nach) auf als Ort der Ecken unendlich vieler, einem Kegelschnitte umschriebener, vollständiger Fünfseite. Umgekehrt ist jede, einem vollständigen Fünfseite umschriebene Curve vierter Ordnung eine Involutionscurve, wobei der dem Fünfseite eingeschriebene Kegelschnitt als Träger-Kegelschnitt auftritt.[1] Wir können daher mit Rücksicht auf obigen Satz nun auch den folgenden aussprechen:

„Einer Curve vierter Ordnung lässt sich im Allgemeinen kein vollständiges Fünfseit einschreiben. Gibt es jedoch ein solches, so gibt es auch noch unendlich viele, welche alle einem und demselben Kegelschnitte umschrieben sind.“

Wenn die Tangenteninvolution $n$-ten Grades eine Gruppe mit zwei Doppelelementen besitzt, so ist der Schnittpunkt dieser Doppelelemente nothwendiger Weise ein Doppelpunkt der Involutionscurve, dessen Tangenten offenbar jene beiden Doppelelemente harmonisch trennen. Ferner folgt auch unmittelbar, dass die sämmtlichen weiteren $(n-4)$ Tangenten einer solchen Gruppe Doppeltangenten der Involutionscurve sind, und ihre Berührungspunkte auf jenen zwei Doppelelementen liegen. Schliesslich sieht man auch leicht ein, dass die Involutionscurve durch die Berührungspunkte des Trägers mit den beiden Doppelelementen hindurchgeht.

Allgemeiner: Enthält eine Gruppe der Tangenten-Involution $r$ Doppelelemente, so sind ihre $\frac{r(r-1)}{2}$ Schnittpunkte Doppel-

---

[1]) Vergleiche: „Ueber Involutionen höherer Grade.“ Crelle-Borchhardt. Bd. 72, pag. 289.

punkte der Involutionscurve. Die Tangenten der Involution in einem solchen Doppelpunkte trennen die beiden, durch ihn gehenden Doppelelemente der Involution harmonisch. Die Involutionscurve geht auch durch die $r$ Berührungspunkte des Träger-Kegelschnittes mit den $r$ Doppelelementen. Die in der Gruppe erübrigenden $n-2r$ Tangenten sind $r$-fache Tangenten der Involutionscurve. Die Berührungspunkte jeder dieser $r$-fachen Tangente sind ihre Schnittpunkte mit den $r$ Doppelelementen.

Wenn eine Curve vierter Ordnung $C_4$ einen Doppelpunkt $d$ von der Beschaffenheit besitzt, dass seine Tangenten mit den nach den Berührungspunkten einer Doppeltangente gehenden Strahlen ein harmonisches Büschel bilden, so ist die Curve eine Involutionscurve.

In der That, es sei $\Delta$ die Doppeltangente mit den Berührungspunkten $\delta\delta'$, so dass also $d\delta$ und $d\delta'$ mit den beiden Tangenten der Curve im Punkte $d$ ein harmonisches System bilden; $aa'$ seien die weiteren Schnitte der Curve mit den Geraden $d\delta$, $d\delta'$. Man construire nun den Kegelschnitt, welcher dem Dreiseite $d\delta\delta'$ eingeschrieben ist, und die Seiten $d\delta$, $d\delta$ in $aa'$ resp. berührt, er sei $K$. Irgend eine Tangente $M_5$ von $K$ möge $C_4$ in $m_1$ $m_2$ $m_3$ $m_4$ schneiden aus welchen Punkten wir an $K$ die Tangenten $M_1$ $M_2$ $M_3$ $M_4$ legen und betrachten nun die Involution fünften Grades, welche durch $M_1$ $M_5$ als eine Gruppe und durch $d\delta$, $d\delta$, $d\delta'$, $d\delta'$, $\Delta$ als zweite Gruppe gegeben erscheint. Die Involutionscurve dieser Involution wird nach früheren in $d$ einen Doppelpunkt besitzen, dessen zwei Tangenten zu $d\delta$, $d\delta'$ harmonisch sind; sie wird ferner durch $a$, $a'$ gehen, und in $\delta$ und $\delta'$ die Gerade $\Delta$ berühren, und schliesslich auch die Punkte $m_1$ $m_2$ $m_3$ $m_4$ enthalten. Nun bilden aber alle Curven vierter Ordnung, welche durch $a$ $a'$ $m_1$ $m_2$ $m_3$ $m_4$ hindurchgehen, $\Delta$ in $\delta\delta'$ berühren, und $d$ zum Doppelpunkte haben, ein Curvenbüschel, weil diese Bedingungen zu 13 einfachen Punkten aequivalent sind. Die Doppelpunkts-Tangentenpaare bilden also eine quadratische Involution in welcher es nur ein einziges Paar von Strahlen geben wird, welche das Strahlenpaar $d\delta$, $d\delta'$ harmonisch trennen; d. h. es gibt in dem Büschel dieser Curven nur eine einzige solche mit der erwähnten harmonischen Eigenschaft am Punkte $d$, und das ist nach Annahme eben unsere Curve $C_4$.

Hiedurch ist nachgewiesen, dass die Involutionscurve der oben festgesetzten Tangenteninvolution fünften Grades unsere Curve vierter Ordnung ist.

Wir haben früher gesehen, dass die Frage, ob eine Curve vierter Ordnung eine Involutionscurve ist, darauf hinauskommt zu untersuchen, ob sich der Curve ein vollständiges Fünfseit einschreiben lässt oder nicht. Man kann nun diese Frage in eine andere, vielleicht einfachere Fassung bringen, und dann so beantworten:

„Eine Curve vierter Ordnung ist dann eine Involutionscurve, d. h. es lassen sich derselben unendlich viele vollständige Fünfseite einschreiben, wenn es auf der Curve drei in gerader Linie liegende Punkte gibt, deren Tangenten ein der Curve eingeschriebenes Dreiseit bilden.“

Sind nämlich $t_1$ $t_2$ $t_3$ jene drei auf der Geraden $G$ liegenden Punkte, $T_1$ $T_2$ $T_3$ ihre drei Tangenten und $t$ der vierte Schnittpunkt von $G$ mit der Curve, so kann man einen Kegelschnitt $K$ construiren, welcher $G$ $T_1$ $T_2$ $T_3$ berührt, und zwar $G$ im Punkte $t$. Diese vier Geraden, $G$ doppelt gezählt, stellen ein der Curve eingeschriebenes, dem $K$ umschriebenes vollständiges Fünfseit dar. Hiedurch ist die letzte Behauptung erwiesen.